UNIVERSITÉ DE LORRAINE

FST FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES Nancy

LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET CHIMIE THÉORIQUES (LPCT)

Communication sur le thème

MODELES QUANTIQUES INTEGRABLES DE GAUDIN DE SPIN $\frac{1}{2}$, A CHAMPS MAGNETIQUES NON NULS : DES EQUATIONS QUADRATIQUES AUX FONCTIONS D'ONDES, SANS UTILISATION DE L'ANSATZ DE BETHE ALGEBRIQUE

Exposé rédigé par

DIMO PANJIO Claude Alain,

doctorant en première année sous la supervision de

Alexandre FARIBAULT.

06 Décembre 2018

➢Plan de la présentation

- ➢Introduction
- ➢Forme générique et relations d'intégrabilité dans les modèles de Richardson-Gaudin (R-G) à champs magnétiques non nuls
- ➢Formes quadratiques génériques des opérateurs dans les modèles sur-cités
- ➢Paramétrisation générique des constantes de couplage et des champs magnétiques suivie de quelques propriétés physiques locales
- ➢Forme générique des fonctions d'ondes de tels modèles
- ➢Conclusion

➢Introduction

➢Systèmes quantiques intégrables de spin $\frac{1}{2}$ $\left(\left[R_j, R_k\right] = 0\right)$

➢Approche de l'Ansatz de Bethe Algébrique

➢Nouvelle approche (approche des valeurs propres)

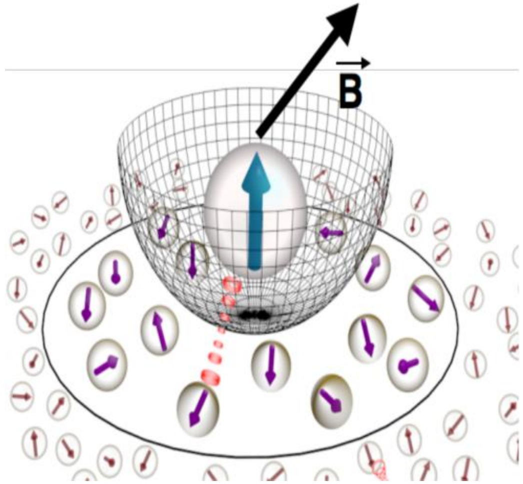
➢Forme générique et relations d'intégrabilité dans les modèles de R-G à champs magnétiques non nuls

(Claude Dimo and Alexandre Faribault 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 325202)

➢Forme générique

$R_j = \sum_\alpha \left(\sum_{i\neq j}^{N} \Gamma_{ji}^{\alpha\alpha} S_j^\alpha S_i^\alpha + B_j^\alpha S_j^\alpha\right),$

$\forall \alpha \in \{x, y, z\}$ et $i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N\}$



➢Relations d'intégrabilité

➢Intégrabilité $\Leftrightarrow$ $\left[R_j, R_k\right] = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Gamma_{kj}^{\beta\beta} B_j^{\tau} + \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} B_k^{\tau} = 0 \\ \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\Gamma_{kl}^{\tau\tau} - \Gamma_{kl}^{\beta\beta}\Gamma_{jl}^{\alpha\alpha} + \Gamma_{kj}^{\beta\beta}\Gamma_{jl}^{\tau\tau} = 0 \end{cases} \forall \alpha \neq \beta \neq \tau, j \neq k \neq l$$

- Formes quadratiques génériques des opérateurs dans les systèmes considérés
  - Forme quadratique des R_j

$$R_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N}\sum_{l\neq j,l>k}^{N}\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\Gamma_{jl}^{\alpha\alpha} S_k^{\alpha} S_l^{\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N} B_j^{\alpha}\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}S_k^{\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N}\left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\right)^2 S_j^{\alpha}S_k^{\alpha} + \frac{1}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N}\left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(B_j^{\alpha}\right)^2.$$

  - Relations entre les R_j et entre les valeurs propres r_j
    - Relations d'intégrabilité $\Longrightarrow$

$$R_j^2 = \sum_{k\neq j}^{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}}{\Gamma_{kj}^{\beta\beta}}\Gamma_{jk}^{\tau\tau}\right)R_k + \frac{1}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N}\left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(B_j^{\alpha}\right)^2,$$

$[R_j, R_k] = 0 \Longleftrightarrow$ les r_j suivent les mêmes lois que les $R_j \Longrightarrow$

$$r_j^2 = \sum_{k\neq j}^{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}}{\Gamma_{kj}^{\beta\beta}}\Gamma_{jk}^{\tau\tau}\right) r_k + \frac{1}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k\neq j}^{N}\left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(B_j^{\alpha}\right)^2 .$$

Ci-dessus sont obtenues les équations quadratiques de Bethe correspondant aux modèles étudiés dans ce travail.

- Paramétrisation générique des constantes de couplage et des champs magnétiques, suivie de quelques propriétés physiques locales des modèles considérés (**Claude Dimo, arXiv:1810.06059**)

  - Paramétrisation générique des R_j

$$B_j^Z = B_k^Z = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \Gamma_{kj}^{xx} = -\,\Gamma_{jk}^{yy} \\ \Gamma_{jk}^{yy} B_j^y B_k^x = -\Gamma_{kj}^{yy} B_j^x B_k^y \equiv \Gamma_{jk} = -\,\Gamma_{kj} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Gamma_{jk}^{xx} = \frac{\Gamma_{jk}}{B_j^x B_k^y}, \quad \Gamma_{jk}^{yy} = \frac{\Gamma_{jk}}{B_k^x B_j^y} \quad et \quad \Gamma_{jk}^{zz} = \frac{\Gamma_{jk}}{B_k^x B_k^y},$$

avec j$\neq$ k et les Γ_{jk}, des fonctions antisymétriques vérifiant les équations de Yang-Baxter pour les modèles isotropes ($\Gamma_{jk} \propto \frac{1}{\varepsilon_j - \varepsilon_k}$).

A partir de ces équations, nous obtenons les paramétrisations suivantes

$$\begin{cases} B_l^z = 1 & , \Gamma_{jk}^{zz} = \dfrac{g\sqrt{(\alpha_x\varepsilon_k+\beta_x)(\alpha_y\varepsilon_k+\beta_y)}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_k)} \\ B_l^y = \sqrt{\dfrac{\tau_y}{(\alpha_y\varepsilon_l+\beta_y)}} & , \Gamma_{jk}^{yy} = \dfrac{g\sqrt{(\alpha_x\varepsilon_k+\beta_x)(\alpha_y\varepsilon_j+\beta_y)}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}, \\ B_l^x = \sqrt{\dfrac{\tau_x}{(\alpha_x\varepsilon_l+\beta_x)}} & , \Gamma_{jk}^{xx} = \dfrac{g\sqrt{(\alpha_x\varepsilon_j+\beta_x)(\alpha_y\varepsilon_k+\beta_y)}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_k)} \end{cases}$$

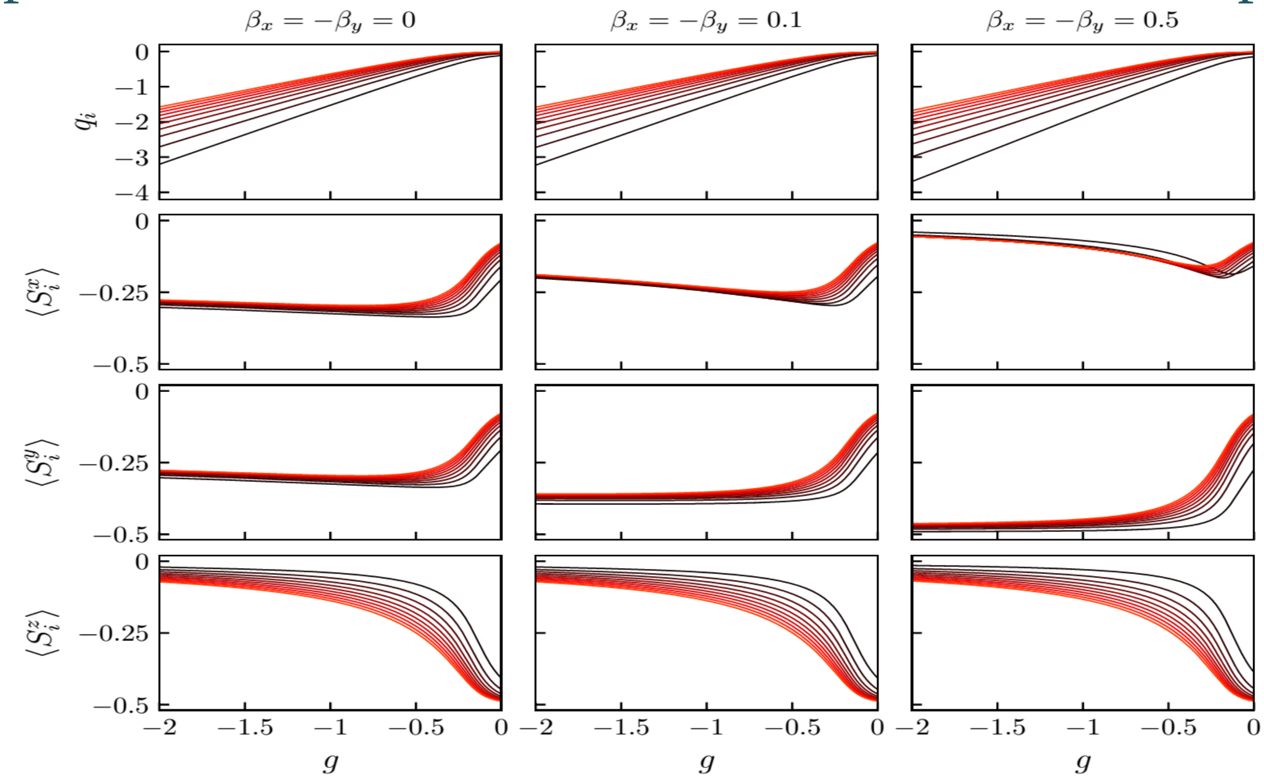
$g, \alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \tau_x, \tau_y, \varepsilon_j, \varepsilon_k \in \mathbb{R}$

➢Quelques propriétés physiques locales

➢Théorème de Hellman-Feynman

$$\begin{cases} \langle S_j^x \rangle = \sqrt{\alpha_x \varepsilon_j + \beta_x}\,\dfrac{\partial r_j}{\partial \tau_x}, \langle S_j^y \rangle = \sqrt{\alpha_y \varepsilon_j + \beta_y}\,\dfrac{\partial r_j}{\partial \tau_y} \\ \langle S_j^z \rangle = r_j - g\,\dfrac{\partial r_j}{\partial g} - \tau_y\,\dfrac{\partial r_j}{\partial \tau_y} - \tau_x\,\dfrac{\partial r_j}{\partial \tau_x} \end{cases},$$

➢Graphes : XXZ XYZ XYZ pour N=10



➢Forme générique des fonctions d'ondes de tels modèles

(**Claude Dimo, "Bethe-Ansatz-free" eigenstates of spin-1/2 R-G integrable models**)

Ces états sont donnés par :

$$|\Psi\rangle = det_N(\mathcal{J}\,)|\Omega\rangle,\ \mathcal{J} = \begin{cases} \mathcal{J}_{jj} = \mathbb{1}_{2^N} \times r_j + \ R_j \\ \mathcal{J}_{jk} = -\mathbb{1}_{2^N} \times \Gamma_{jk}^{zz} \end{cases},$$

$|\Omega\rangle$ est une fonction d'onde arbitraire, considérée comme état du vide.

- ➢remarque :
  - ➢Pour les états propres $|\Psi_m\rangle$ du système considéré, nous aurons alors :

$$|\Psi_m\rangle = det_N(\mathcal{J}^m)|\Omega\rangle,\ \mathcal{J}^m = \begin{cases} \mathcal{J}_{jj} = \mathbb{1}_{2^N} \times r_j^m + \ R_j \\ \mathcal{J}_{jk} = -\mathbb{1}_{2^N} \times \Gamma_{jk}^{zz} \end{cases},$$

$$\mathrm{m} \in \{1, \ldots, 2^N\}.$$

- ➢Notes :
  - ➢$det_N(\mathcal{J}^m) \propto |\Psi_m\rangle\,\langle\Psi_m|$,
  - ➢Pas de contraintes supplémentaires à poser sur le choix de $|\Omega\rangle$

➢Conclusion

- ➢Construction de nouveaux modèles anisotropes et intégrables de spin ½ à champs non nuls,

- ➢Affranchissement de l’Ansatz de Bethe dans la
  - ➢Recherche du spectre d’énergie (par résolution des systèmes d’équations non linéaires les plus simples qui puissent exister),

  - ➢Paramétrisation la plus générale des constantes de couplage et des champs magnétiques des modèles étudiés ici,

  - ➢Détermination généralisée des états dans ces modèles.

- ➢Facilitations et gain en temps dans les simulations numériques